121 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΤΜΗΜΑ Ι
Φροντιστηριακές Ασκήσεις # 7
14-12-18

1. Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών και έστω $adj(A)$ και $adj(B)$ οι προσαρτημένοι πίνακες των A, B αντίστοιχα. Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι, να δείξετε ότι και ο πίνακας $adj(AB)$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$adj(AB)^{-1} = adj(A)^{-1} adj(B)^{-1}.$$

2. Έστω ο μετασχηματισμός

$$T : \mathbb{P}^2[x] \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

που ορίζεται απο τη σχέση

$$T(f) = \begin{pmatrix} 2f'(0) & f(1) \\ f''(2) & 0 \end{pmatrix} \ \forall f \in \mathbb{P}^2[x].$$

(α') Να δείξετε ότι ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

(β') Να βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας του T.

(γ') Είναι ο T ένα προς ένα, επί ;

3. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$T(x, y, z) = (y, z, -x - y - z) \ \forall (x, y, z) \in R^3.$$

Είναι ο T αντιστρέψιμος; Αν ναι, να υπολογίσετε τον T^{-1}.

4. Να βρείτε τον πίνακα P από τη βάση $\Sigma'= \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ στη βάση $\Sigma= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ και ανάποδα.

5. Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$T(x, y, z) = (\frac{19}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{13}{4}z, \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}y - \frac{11}{4}z, 3x + y - 4z) \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(α') Να βρείτε τον πίνακα A του T στη βάση α$= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(β') Να βρείτε τον πίνακα B του T στη βάση $\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ του $\mathbb{R}^3$.